УДК 517.946

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

М.Ф.ИСМАИЛОВА
Бакинский Государственный Университет
mila_72@mail.ru

В работе дано определение обобщенного решения некоторых операторно-дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа и получены условия существования таких решений. Все эти условия заданы свойствами коэффициентов операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: операторно-дифференциальные уравнения, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, обобщенное решение.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – положительно определенный самосопряженный оператор в H. Обозначим через $L_2(R^2;H)$ гильбертово пространство вектор-функций $f(x)$, $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $R=(-\infty;\infty)$, определенных в R^2 почти всюду, со значениями в H, измеримые по Бохнеру и квадратично интегрируемы в R^2, т.е.

$$\|f\|_{L_2(R^2;H)}=\left(\int_{R^2}\|f(x)\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty .$$

Обозначим через $D(R^2;H)$- множество бесконечно дифференцируемых вектор-функций $u(x)$, со значениями в $D(A^2)$, имеющих компактные носители в R^2. Как в [1] в линейном множестве $D(R^2;H)$ определим норму

$$\|u\|_{W_2^2(R^2;H)}=\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^2u\right\|_{L_2(R^2;H)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Множество $D(R^2;H)$ с этой нормой является предгильбертовым пространством, пополнение которого обозначим через $W_2^2(R^2;H)$.

Рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка в пространстве H

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+A^4u+\sum_{\substack{i,j=0\\0\le i+j\le 4}}^{4} A_{i,j}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x_1^i\partial x_2^j}=f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $u(x)$-вектор-значные функции со значениями в H, A-положительно определенный самосопряженный оператор, который участвует при определении пространства $W_2^2(R^2;H)$, а $A_{i,j}$-линейные операторы в H .

Мы дадим определение обобщенного решения уравнения (1) и укажем условия существования и единственности таких решений в терминах коэффициентов операторно-дифференциального уравнения (1). Обозначим через

$$P_0u\equiv\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+A^4u\,,\quad P_1u\equiv\sum_{\substack{i,j=0\\0\le i+j\le 4}}^{4} A_{i,j}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x_1^i\partial x_2^j}\ ,\quad u\in D(R^2;H).$$

Предположим, что $\psi\in D(R^2;H)$ и рассмотрим билинейный функционал $(P_1u,\psi)_{L_2(R^2;H)}$, определенный на $D(R^2;H)\oplus D(R^2;H)$.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть A-положительно определенный самосопряженный оператор, $A_{i,j}$-линейные операторы в H, для которых операторы $B_{0,0}=A^{-2}A_{0,0}A^2, B_{1,0}=A^{-2}A_{1,0}A^{-1}$, $B_{0,1}=A^{-2}A_{0,1}A^{-1}$ $B_{1,1}=A^{-1}A_{1,1}A^{-1}$, $B_{2,0}=A^{-1}A_{2,0}A^{-1}$, $B_{0,2}=A^{-1}A_{0,2}A^{-1}$, $B_{3,0}=A_{3,0}A^{-1}$, $B_{0,3}=A_{0,3}A^{-1}$, $B_{3,1}=A_{3,1}$, $B_{1,3}=A_{1,3}$, $B_{4,0}=A_{4,0}$, $B_{0,4}=A_{0,4}$ ограничены в H. Тогда билинейный функционал $(P_1u,\psi)_{L_2(R^2;H)}$, определенный на $D(R^2;H)\oplus D(R^2;H)$, продолжается по непрерывности до билинейного функционала $P_1(u,\psi)$ на пространстве $W_2^2(R^2;H)\oplus W_2^2(R^2;H)$, где

$$P_1(u,\psi)=P_{1,1}(u,\psi)+P_{1,2}(u,\psi)+P_{1,3}(u,\psi)+P_{1,4}(u,\psi), \tag{2}$$

а

$$P_{1,1}(u,\psi)=\sum_{0\le i+j\le 1}\left(A_{i,j}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x_1^i\partial x_2^j},A^2\psi\right)_{L_2},$$

$$P_{1,2}(u,\psi)=(-1)\left(\left(A_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)_{L_2}+\left(A_{2,0}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{L_2}+\left(A_{0,2}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)_{L_2}\right),$$

$$P_{1,3}(u,\psi)=\left(A_{3,0}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right)_{L_2}+\left(A_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+\left(A_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+$$
$$+\left(A_{0,3}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)_{L_2},$$

$$P_{1,4}(u,\psi)=\left(A_{4,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right)_{L_2}+\left(A_{3,1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+\left(A_{1,3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+$$
$$+\left(A_{2,2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+\left(A_{0,4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)_{L_2}.$$

Доказательству леммы предпошлем следующую лемму.

Лемма 2. При $\psi\in W_2^2\left(R^2;H\right)$ имеет место следующие неравенства:

$$\left\|A^2\psi\right\|_{L_2}\le\|\psi\|_{W_2^2},\tag{3}$$

$$\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i}\right\|_{L_2}\le\|\psi\|_{W_2^2},\quad i=1,2,\tag{4}$$

$$\left\|A\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{L_2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\|\psi\|_{W_2^2},\quad i=1,2,\tag{5}$$

$$\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_{L_2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\|\psi\|_{W_2^2}.\tag{6}$$

Доказательство этой леммы достаточно провести для вектор-функций $\psi\in D\left(R^2;H\right)$.

Пусть $\psi\in D\left(R^2;H\right)$. Неравенства (3) и (4) очевидны. Докажем неравенство (5) и (6). После преобразования Фурье по теореме Планшереля имеем:

$$\left\|A\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\|_{L_2}^2=\left\|A\xi_i\hat\psi(\xi)\right\|_{L_2}^2=\left(A\xi_i\hat\psi(\xi),A\xi_i\hat\psi(\xi)\right)_{L_2}=\left(\xi_i^2\hat\psi(\xi),A^2\psi(\xi)\right)_{L_2}\le$$
$$\le\left\|\xi_i^2\hat\psi(\xi)\right\|_{L_2}\left\|A^2\hat\psi(\xi)\right\|_{L_2}\le\frac{1}{2}\left(\left\|\xi_i^2\hat\psi(\xi)\right\|_{L_2}^2+\left\|A^2\hat\psi(\xi)\right\|_{L_2}^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i}\right\|_{L_2}^2+\left\|A^2\psi\right\|_{L_2}^2\right)\le\frac{1}{2}\|\psi\|_{W_2^2}^2,\tag{7}$$

т.е. неравенство (5) верно. Докажем неравенство (6). Очевидно, что

$$\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_{L_2}^2 = \left\|\xi_1\xi_2\hat{\psi}(\xi)\right\|_{L_2}^2 = \left(\xi_1\xi_2\hat{\psi}(\xi), \xi_1\xi_2\hat{\psi}(\xi)\right)_{L_2} = (\xi_1^2\hat{\psi}(\xi), \xi_2^2\psi(\xi)) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left\|\xi_1^2\hat{\psi}(\xi)\right\|_{L_2}^2 + \left\|\xi_2^2\hat{\psi}(\xi)\right\|_{L_2}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1}\right\|_{L_2}^2 + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\|_{L_2}^2\right) \le \frac{1}{2}\|\psi\|_{L_2(R;H)}^2. \qquad (8)$$

Лемма 2 доказана.

Теперь докажем лемму 1. Очевидно, что при $0 \le i + j \le 1$

$$\left|\left(A_{0,0}u, \psi\right)_{L_2}\right| = \left(A^{-2}A_{0,0}A^2u, A^2\psi\right)_{L_2} \le \left\|A^{-2}A_{0,0}A^2\right\| \cdot \left\|A^2u\right\|\left\|A^2\psi\right\| \le$$

$$\le \left\|B_{0,0}\right\| \cdot \|u\|_{W_2^2} \cdot \|\psi\|_{W_2^2}, \qquad (9)$$

$$\left|\left(A_{1,0}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \psi\right)_{L_2}\right| = \left(A^{-2}A_{1,0}A^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x_1}, A^2\psi\right)_{L_2} = \left\|A^{-2}A_{1,0}A^{-1}\right\| \cdot \left\|A\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\| \cdot$$

$$\cdot \left\|A^2\psi\right\|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|B_{1,0}\right\| \cdot \|u\|_{W_2^2} \cdot \|\psi\|_{W_2^2}. \qquad (10)$$

Аналогично имеем:

$$\left|\left(A_{0,1}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \psi\right)_{L_2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|B_{0,1}\right\| \cdot \|u\|_{W_2^2} \cdot \|\psi\|_{W_2^2}. \qquad (11)$$

Отсюда получаем, что $\left|P_1(u,\psi)\right| \le const\|u\|_{W_2^2}\|\psi\|_{W_2^2}$.

Далее, имеем:

$$\left|\left(A_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)_{L_2}\right| = \left(A^{-1}A_{1,1}A^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x_1}, A\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)_{L_2} \le \left\|B_{1,1}\right\| \cdot \left\|A\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2}\left\|A\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{L_2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|B_{1,1}\right\| \cdot \|u\|_{W_2^2} \cdot \|\psi\|_{W_2^2}, \qquad (12)$$

$$\left|\left(A_{2,0}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\right|_{L_2} = \left|\left(A^{-1}A_{2,0}A^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x_1}, A\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le$$

$$\le \left\|B_{2,0}\right\| \cdot \left\|A\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2}\left\|A\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{L_2} \le \frac{1}{2}\left\|B_{2,0}\right\| \cdot \|u\|_{W_2^2} \cdot \|\psi\|_{W_2^2}. \qquad (13)$$

Аналогично имеем:

$$\left|\left(A_{0,2}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{2}\|B_{0,2}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}. \tag{14}$$

Таким образом, $|P_2(u,\psi)| \le const\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}$. Далее, применив лемму 2, получаем следующие неравенства:

$$\left|\left(A_{3,0}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right)\right|_{L_2} \le \|B_{3,0}\|\cdot\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2}\left\|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right\|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|B_{3,0}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{15}$$

$$\left|\left(A_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le \|B_{2,1}\|\cdot\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2}\left\|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_{L_2} \le \frac{1}{2}\|B_{2,1}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{16}$$

$$\left|\left(A_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{2}\|B_{1,2}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{17}$$

$$\left|\left(A_{0,3}\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|B_{0,3}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}. \tag{18}$$

Следовательно, $|P_3(u,\psi)| \le const\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}$. Далее, имеем:

$$\left|\left(A_{4,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right)\right|_{L_2} \le \|B_{4,0}\|\cdot\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}\right\|_{L_2}^2\left\|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1}\right\|_{L_2}^2 \le \|B_{4,0}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{19}$$

$$\left|\left(A_{0,4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right)\right|_{L_2} \le \|B_{0,4}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{20}$$

$$\left|\left(A_{3,1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|B_{3,1}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{21}$$

$$\left|\left(A_{1,3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|B_{1,3}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}, \tag{22}$$

$$\left|\left(A_{2,2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{L_2} \le \frac{1}{2}\|B_{2,2}\|\cdot\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}. \tag{23}$$

Следовательно, $|P_4(u,\psi)| \le const\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}$. Таким образом, $|P_1(u,\psi)| \le const\|u\|_{W_2^2}\cdot\|\psi\|_{W_2^2}$. Лемма 1 доказана.

Теперь дадим определение обобщенного решения уравнения (1).

Определение. Если при $f \in L_2(R^2;H)$ существует вектор-функция $u \in W_2^2(R^2;H)$, которая удовлетворяет тождеству

$$(u,\psi)_{W_2^2} + P_1(u,\psi) = (f,\psi) \qquad \forall\ \psi \in W_2^2(R^2;H),$$

то её будем называть обобщенным решением уравнения (1).
Имеет место следующая.

Теорема 1. Пусть выполняются условия леммы 1, причем имеет место неравенство

$$\alpha = \left(\|B_{0,0}\| + \|B_{4,0}\| + \|B_{0,4}\|\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|B_{1,0}\| + \|B_{0,1}\| + \|B_{3,0}\| + \|B_{0,3}\| + \|B_{3,1}\| + \|B_{1,3}\|\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\|B_{1,1}\| + \|B_{2,0}\| + \|B_{0,2}\| + \|B_{2,1}\| + \|B_{1,2}\| + \|B_{2,2}\|\right) < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение при любом $f \in L_2(R^2;H)$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение $P_0 u = f$ имеет единственное обобщенное решение u_0. Будем искать решение уравнения $Pu = f$ в виде $u_0 + \omega$, где $\omega \in W_2^2(R^2;H)$. Тогда получаем:

$$\langle \omega,\psi \rangle \equiv (\omega,\psi)_{W_2^2} + P_1(\omega,\psi) = -P_0(u_0,\psi). \qquad (24)$$

Используя условие $\alpha < 1$ теоремы и неравенства (9)-(23) при $u = \psi$, получаем:

$$\langle \psi,\psi \rangle = \|\psi\|^2_{W_2^2} - |P_1(\psi,\psi)| \geq \|\psi\|^2_{W_2^2} - \alpha\|\psi\|^2_{W_2^2} = (1-\alpha)\|\psi\|^2_{W_2^2}. \qquad (25)$$

Так как правая часть (24) непрерывный по ψ функционал, а левая часть в силу неравенства (25), удовлетворяет условиям теоремы Лакса-Мильграма [2,3], то существует единственное $\omega \in W_2^2(R^2;H)$, удовлетворяющее равенству (24). Тогда $u = u_0 + \omega$ будет искомым единственным обобщенным решением уравнения (1). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 351 с.
3.Мирзоев С.С., Гумбаталиев Р.З. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциального уравнения на конечном отрезке //Доклады РАН, 2010, т. 431, №4, с.454-456.

4. İsmayılova M.F. On solvability of fourth order operator-differential equations of elliptic type on weight spaces // Tbilisi International Centre of mathematics and informatics, 2009, v. 13, p.21-29.

BƏZİ DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİ HAQQINDA

M.F.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

İşdə bəzi xüsusi törəməli elliptik tipli operator-diferensial tənliklərin ümumiləşmiş həllinin tərifi verilmiş və belə həllin varlığı və yeganəliyi şərti alınmışdır. Bu şərtlər operator-diferensial tənliklərin əmsallarının xassələri vasitəsilə verilmişdir.

Açar sözlər: operator-diferensial tənlik, Hilbert fəzası, öz-özünə qoşma operator, ümumiləşmiş həll.

ON GENERALIZED SOLUTIONS OF SOME FOURTH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.F.ISMAYILOVA

SUMMARY

The definition of the generalized solution of some partial operator-differential equations of elliptic type is given and conditions on the existence of such solutions are obtained. All these conditions are given by the properties of the coefficients of an operator-differential equation.

Key words: operator-differential equation, Hilbert space, self-adjoint operator, generalized solution.

Поступила в редакцию 06.07.2010 г.
Принято к печати 10.03.2011 г.